

令和4年度4月入学者選抜試験問題

奈良女子大学大学院人間文化総合科学研究科(博士前期課程)

数物科学専攻

【 一 般 選 抜 】

試験科目名 : 筆記試験(数 学)

令和3年7月3日(土)

試験時間 : 10:00~12:00

注意事項

- (1) 解答用紙の指定された箇所に受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
受験番号は、受験票の受験番号欄に記入してあるとおりに書くこと。
指定された以外の箇所には、受験番号・氏名を絶対に書かないこと。
- (2) 問題冊子及び解答用紙は、指示があるまで開いてはならない。
- (3) 全問解答すること。
- (4) 問題1から問題3を問題ごとに別々の解答用紙を使って解答すること。
解答用紙(両面)は3枚ある。
解答用紙は必要に応じて追加できるので、手を挙げて知らせること。
- (5) 問題冊子に乱丁、落丁、印刷不鮮明など不備があった場合は、挙手をして試験監督者に申し出ること。
- (6) 問題冊子の総ページ数 ----- 5ページ
問題ページ ----- 第3~第5ページ(第1, 第2ページは白紙)
- (7) 試験終了後、この問題冊子は持ち帰ること。

1 3次正方行列 A, B に対し, 関係 $A \sim B$ を

$A \sim B \iff B = P^{-1}AP$ をみたす正則行列 P が存在する

と定義する. 以下の問いに答えよ.

(1) $A \sim B$ ならば $B \sim A$ であることを示せ. また, $A \sim B$ かつ $B \sim C$ ならば $A \sim C$ であることを示せ.

(2) $A \sim B$ ならば, A の固有値は B の固有値でもあることを示せ.

(3) $\begin{pmatrix} 9 & -6 & 4 \\ 6 & -3 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ であることを示せ.

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ であるかないかを判定せよ.

2 定義域が \mathbf{R}^2 である実数値関数 f を

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{-\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

と定める。以下の問いに答えよ。

- (1) f は $(0, 0)$ で連続であることを示せ。
- (2) $a > 0$ に対し、 $I_a = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$ とする。

$$\iint_{I_a} f(x, y) \, dx dy$$

を求めよ。

- (3) $a > 0$ に対し、 $J_a = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$ とする。

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{J_a} f(x, y) \, dx dy$$

を求めよ。

3 $0 \leq x \leq 1$ で連続な実数値関数全体の集合を C とする.

$f, g \in C$ に対し

$$d(f, g) = \sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

(1) $f, g \in C$ に対して $d(f, g) = 0$ ならば, $0 \leq x \leq 1$ をみたすすべての x に対して $f(x) = g(x)$ であることを示せ.

(2) $f, g, h \in C$ に対して

$$d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$$

が成り立つことを示せ.

(3) a, b は実数であるとする. $p(x) = e^x$, $q(x) = ax + b$ に対して $d(p, q)$ を a, b の式で表し, $d(p, q)$ が最小となる a, b の値を求めよ.